22. LÍMITES DE SUCESIONES.

- k representa un número distinto de 0, y n un número mayor que 0:

$\pm\infty + k = \pm\infty$

$+\infty + \infty = +\infty$

$-\infty - \infty = -\infty$

$\infty \cdot k = \infty$

$0 \cdot k = 0$

$\frac{\infty}{k} = \infty$

$\frac{k}{\infty} = 0$

$\frac{0}{k} = 0$

$\frac{k}{0} = \infty$

$\frac{\infty}{0} = \infty$

$\frac{0}{\infty} = 0$

$k^0 = 1$

$n^{+\infty} = \begin{cases} +\infty & \text{si } n > 1 \\ 0 & \text{si } n < 1 \end{cases}$

$n^{-\infty} = \begin{cases} 0 & \text{si } n > 1 \\ +\infty & \text{si } n < 1 \end{cases}$

$0^k = \begin{cases} 0 & \text{si } k > 0 \\ \infty & k < 0 \end{cases}$

$0^{+\infty} = 0$

$(+\infty)^k = \begin{cases} +\infty & \text{si } k > 0 \\ 0 & \text{si } k < 0 \end{cases}$

$(+\infty)^{+\infty} = +\infty$

$(+\infty)^{-\infty} = 0$

$\log_n 0^+ = -\infty$

$\log_n 1 = 0$

$\log_n(+\infty) = +\infty$

Indeterminaciones:

$+\infty - \infty$

$0 \cdot \infty$

$\frac{0}{0}$

$\frac{\infty}{\infty}$

0^0

$(+\infty)^0$

1^∞

- Límites de polinomios: $a_n = P(n)$.

  Da siempre $+\infty$ ó $-\infty$. El signo es el del coeficiente del término de mayor grado.

- Límites de cocientes de polinomios: $a_n = \frac{P(n)}{Q(n)}$.

Se obtiene siempre una indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$, que se resuelve dividiendo cada término del numerador y cada término del denominador por la n de mayor grado que aparezca en la fracción.

Se puede seguir la siguiente regla:

– Da ∞ si el grado de $P(n)$ es mayor que el de $Q(n)$. El signo depende de los signos del término de mayor grado de cada polinomio.

– Da 0 si el grado de $P(n)$ es menor que el de $Q(n)$.

– Si ambos grados son iguales, el resultado es el coeficiente del término de mayor grado de $P(n)$ dividido entre el coeficiente del término de mayor grado de $Q(n)$.

- Límites con radicales.– Pueden aparecer las siguientes indeterminaciones:

– $\frac{\infty}{\infty}$: se resuelve igual que en los límites de cocientes de polinomios.

– $+\infty - \infty$: se multiplican el numerador y el denominador por el conjugado de la expresión irracional.

- Límites con indeterminaciones del tipo 1^∞.– Se resuelven mediante el número e.

Se define el número e como $\mathrm{e} = \text{lím}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Es un número irracional.

$\mathrm{e} = 2{,}71828182845904523536028747135 27...$

- Propiedades de los límites de sucesiones:

– El límite de una sucesión, cuando existe, es único.

– $\text{lím}(a_n + b_n) = \text{lím } a_n + \text{lím } b_n$

– $\text{lím}(a_n - b_n) = \text{lím } a_n - \text{lím } b_n$

– $\text{lím}(a_n \cdot b_n) = \text{lím } a_n \cdot \text{lím } b_n$

– $\text{lím}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\text{lím } a_n}{\text{lím } b_n}$, si $\text{lím } b_n \neq 0$.

– $\text{lím } (a_n)^{b_n} = (\text{lím } a_n)^{\text{lím } b_n}$, si $\text{lím } a_n \geq 0$.

1. Calcula los siguientes límites de sucesiones:

a) $\text{lím}(n^3 - n^2)$

b) $\text{lím}(-n^2 + 2n - 1)$

c) $\text{lím}(n^2 - 7n^3 + 19n - 1)$

d) $\text{lím}(n^{10} - n^8 - n^6)$

e) $\text{lím}\left(\frac{1}{4n} + n^2 - 1\right)$

f) $\text{lím}\left(\frac{1}{2n} + \frac{1}{3n^2} + 1\right)$

g) $\text{lím}\frac{1-3n}{1/n+1}$

h) $\text{lím}\frac{3n-1}{\frac{1}{2n}+1}$

i) $\text{lím}\frac{n^2}{1+1/n}$

j) $\text{lím}\left[\left(\frac{1}{n}\right)^{-n^2}\right]$

k) $\text{lím}\frac{5n^3 - n^2 + n}{2n^3 + 4n - 1}$

l) $\text{lím}\frac{-3n^3 - n^2 - n - 1}{-n^2 - n - 1}$

m) $\text{lím}\frac{n^2 + 7n + 5}{n^5}$

n) $\text{lím}\left(\frac{n^2}{2n-1} - \frac{n^2+1}{2n+1}\right)$

o) $\text{lím}\left[(-1)^n \cdot \frac{1}{n+1}\right]$

p) $\text{lím}\left[(-1)^n \cdot \frac{n}{n+1}\right]$

2. Calcula los siguientes límites:

a) $\text{lím}\left(\sqrt[3]{n^2} + \frac{1}{2n+3}\right)$

b) $\text{lím}\frac{\sqrt{n+1}}{n+2}$

c) $\text{lím}\frac{\sqrt{2n^2+n+3}}{n+5}$

d) $\text{lím}\frac{\sqrt{n^3 - n^2 + 3n + 2} - 2n}{3n+1}$

e) $\text{lím}\frac{\sqrt{n^3 + 2n - 1} - n^2}{\sqrt{n^4 + n^3 - n^2 + n + 1}}$

f) $\text{lím}\frac{\sqrt{25n^2+1} - \sqrt{9n^2+1}}{\sqrt{4n^2+1} - 1}$

g) $\text{lím}\left(\sqrt{n^2-1}-\sqrt{n^2+1}\right)$

h) $\text{lím}\left(n-\sqrt{n^2+10n}\right)$

i) $\text{lím}\left[\sqrt{n}\cdot\left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}\right)\right]$

3. Calcula los siguientes límites:

a) $\text{lím}\left[\left(\dfrac{4n^3+2n}{5n^3-2}\right)^{\frac{2n+1}{n^2}}\right]$

b) $\text{lím}\left[\left(\dfrac{8n^3-1}{2n^3+n+1}\right)^{\frac{n}{2n-1}}\right]$

c) $\text{lím}\left[\left(\dfrac{n+3}{2n^3-1}\right)^{2n}\right]$

d) $\text{lím}\left[\left(\dfrac{2n^2+2}{n^2+n+1}\right)^{-n^2-n+1}\right]$

e) $\text{lím}\left[\left(\dfrac{1}{2n^2-1}\right)^{\frac{-n^2}{n+1}}\right]$

f) $\text{lím}\left[\left(2+\dfrac{1}{n}\right)^{n}\right]$

g) $\text{lím}\left[\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^{-n}\right]$

h) $\text{lím}\left[\left(1+\dfrac{2}{5n}\right)^{2n}\right]$

i) $\text{lím}\left[\left(1+\dfrac{1}{n+5}\right)^{n+1}\right]$

j) $\text{lím}\left[\left(\dfrac{n}{n+5}\right)^{n^2}\right]$

k) $\text{lím}\left[\left(\dfrac{3n^2+1}{3n^2-1}\right)^{\frac{n^2}{n+1}}\right]$

l) $\text{lím}\left[\left(\dfrac{2n^2-n+1}{2n^2-3n+2}\right)^{-n+1}\right]$

m) $\text{lím}\left[\left(\dfrac{3n-1}{2n+4}\cdot\dfrac{n+1}{n-1}\right)^{n}\right]$